

Aplikace Benfordova zákona na vládní makroekonomická data: případ obchodní bilance

The Application of Benford's Law on Government Macroeconomics data: Case of Trade Balance

Michal Plaček

Abstract:

Purpose of the article: This article builds on research published in the article “*Fact and Fiction in EU Governmental Economic Data*”. The first section summarizes the basic theory of Benford's Law. The possible applications of Benford's Law in cases detecting manipulation of government economic data is dealt with in the practical section.

Methodology/methods: An analysis of available literature and empirical studies is used in the theoretical section. We test hypotheses about the convergence of empirical data against Benford's distribution in the practical section. The Mean Absolute Deviation and Z test are used as the test criterion.

Scientific aim: The primary aim of the article is to summarize the current theory regarding Benford's Law and the practical applications of this theory to governmental macroeconomic data. We compare the empirical results of the Czech Republic with the results of previous studies and discuss the possibilities and limitations of the utilization of the Benford law.

Findings: Based on the critical values of the Mean Absolute Deviation and Z test for the first digit of the trade balance, the hypothesis that the occurrence of the first digit converges to Benford's distribution must be rejected. However, the second digit and the first and second combined we found to converge to Benford's alias logarithmic distribution.

Conclusions: The utilization in field of macroeconomic data is very limited because of limiting factors like the small size of the data sample, structural shifts in the economy, macroeconomic adjustment, general availability of data and finally because of the influence of utilized statistical tests. It can be used only as a complementary instrument for macroeconomic data control. The site audit still remains as the crucial instrument.

Keywords: Benford's law, trade balance, Z test, manipulations

JEL Classification: M40, C10

Úvod

Článek „*Fact and Fiction in EU Governmental Economics Data*“ (Rauch, Götsche, Brähler, Engel, 2011) publikovaný v German Economics Revue byl jednou z prvních aplikací Benfordova zákona na vládní ekonomická data. Před výše zmiňným článkem byl publikován článek „*On the Application of Benford's Law to International Macroeconomic Statistics*“ (Nye, Moul, 2007) a článek od (Gonzales-Garcia, Pastor, 2009), který polemizoval s tezemi (Nye, Moul, 2007). Do této doby se aplikace soustředila převážně na účetnictví a daňovou problematiku firem viz. (Carslaw, 1998), (Nigrini, Mittermaier, 1997), matematiku (Hill, 1998), (Morrow, 2009), zkoumání výsledků voleb (Decker, Myagkov, Ordeshook, 2011) a v neposlední řadě také na věrohodnost vědeckých výsledků, např. regresních koeficientů (Diekmann, Jann, 2010). V článku „*Fact and Fiction in EU Governmental Economics Data*“ se zaměřili autoři na ekonomická data 27 členských států EU od roku 1999 do roku 2009. Na místo testu konvergence dat k Benfordovu rozdělení hodnotily státy podle šířky odchylky dat od Benfordova rozdělení, respektive průměru výsledku chi-kvadrát testu. Tímto způsobem byly testovány následující data:

- Vládní deficit a dluh.
- Vládní příjmy, výdaje a hlavní agregáty.
- HDP a jeho hlavní komponenty.
- Rozvaha, konsolidovaná aktiva a pasiva.

Výsledné zjištění bylo, že ze všech členských států EU zejména Řecko vykazuje signifikantní odchylku dat od Benfordova rozdělení. Problematičnost řeckého národního účetnictví potvrdil další vývoj. U států označovaných zkratkou PIGS testovaná data odhalila významnou odchylku od Benfordova rozdělení pouze u Irska. Pokud se zaměříme na Českou republiku, tak podle autorů vykazovala nejmenší průměry chí kvadrát testu.

Cílem tohoto článku je shrnout základní teorii týkající se aplikace Benfordova zákona na účetní a makroekonomická data, srovnat výsledky empirické aplikace s již realizovanými studiemi na toto téma a následně diskutovat reálné možnosti využití Benfordova testu při kontrole kvality a manipulace s makroekonomickými daty.

1. Základní teorie

První zmínku o Benfordově zákoně, původně také tzv. „*First digit law*“ učinil americký astronom Simon Newcomb v 1881 v článku nazvaném „*Note on*

the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers“ v The American Journal of Mathematics. V článku tvrdí, že pravděpodobnost, že první číslice v číslu bude 1 není 0,111 (1:9 = 0,1111), jak bychom mohli očekávat, ale 0,301. Tato teze byla znovu objevena Frankem Benfordem v článku „*The Law of Anomalous Numbers*“ in Proc. Amer. Phil. Soc 78, pp 551–72., který se tímto problémem zabýval mnohem systematictěji a prozkoumal více než 20 000 vzorků dat (Barrow, 2011).

Matematickou aplikací Benfordova zákona se zabývá především Theodore Hill bližší viz. (Hill, 1995a), (Hill, 1995b), (Berhger, Hill 2011). Za zásadní můžeme považovat následující teorém: „*Pokud je rozdělení zvolené jako náhodné a pokud z každého takového rozdělení vezmeme náhodný vzorek, signifikantní čísla z tohoto rozdělení konvergují k logaritmickému rozdělení alias Benfordovu rozdělení.*“

Pravděpodobnost výskytu první číslice $D1$ podle Benfordova rozdělení je:

$$P(D1 = d1) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{d1}\right)\right), d1 \in \{1 \dots 9\}. \quad (1)$$

Pravděpodobnost výskytu druhé číslice $D2$ podle Benfordova rozdělení je:

$$P(D1 = d1) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{d1d2}\right)\right), d1 = 1, d2 \in \{1 \dots 9\}. \quad (2)$$

Pokud rozšíříme naši analýzu na výskyt čísla v n -té pozici, použijeme tento obecný vzorec:

$$P_n\{d\} = \frac{1}{\ln(B)} \sum_{k=B^{n-1}}^{B^n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{kB+d}\right) \quad (3)$$

Další matematické vlastnosti Benfordova rozdělení jsou následující:

- Násobení Benfordova rozdělení jakoukoliv konstantou má za výsledek opět Benfordovo rozdělení.
- Může být aplikováno na všechny numerické systémy.
- Násobení, dělení, umocnění, sčítání a odčítání Benfordova rozdělení má za výsledek opět Benfordovo rozdělení (Watrin, 2008).

První aplikaci Benfordova zákona v účetnictví provedl Carslaw v roce 1988. Carslawova hypotéza zněla: „*Pokud je firemní čistý příjem těsně pod psychologickou hranicí, manažeři mají tendenci zaokrouhlovat tento příjem nahoru.*“ Například pokud máme čistý příjem 798 000 a 19,97 mil. Manažeři se budou snažit zaokrouhlit tyto čísla na částky 800 000 a 20 mil. Tato aktivita je pochopitelná vzhledem k manažerským motivačním programům. Carslaw tvrdil, že toto chování lze odhalit pomocí

aplikace Benfordova zákona, tzn. v souboru dat bude vyšší výskyt nul na druhé pozici a nižší výskyt čísla 9 na druhé pozici v porovnání s Benfordovým rozdělením. Na Carlawův výzkum navázal Thomas, který zkoumal zaokrouhlování daňových ztrát v U.S.A, jeho další analýza se zaměřovala na ukazatel Earnings Per Share, číslo devět se na konci výsledku tohoto ukazatele vyskytovalo méně, než by se očekávalo. Výsledkem bylo tvrzení, že Earnings Per Share se zaokrouhluje nahoru, zatímco ztráty dolů. V roce 1993 Gupta a Christian analyzovali data daňových poplatníků, která poplatníci uváděli v daňových přiznáních. Studie se soustředila na poplatníky, kteří měli příjem menší než 100 000 dolarů. Pokud v této kategorii sníží plátce daně svůj příjem o několik dolarů, může spadnout do nižší kategorie daňové sazby. Závěry prokázaly zkreslování příjmů poplatníky, kteří byli na hranici pro zvýšení mezní sazby daně.

O významný posun teorie aplikace Benfordova zákona v oblasti odhalování účetních podvodů se zasloužil Mark Nigrini. Ve své první studii zkoumal Nigrini první a druhé číslo úroků placených a úroků připsaných na vzorku asi 200 000 daňových přiznáních v letech 1985 až 1988. Výsledkem bylo zkeslení směrem k nižším číslům u úroků připsaných a vyšších čísel u úroků placených. Po tomto výzkumu následovaly praktické případové studie z konkrétních firem, například test prvních čísel, druhých čísel a prvních dvou čísel u vydaných faktur petrolejářské firmy s cílem odhalit duplicitu v dokladech. Další aplikací byla analýza zaokrouhlování čísel.

Velmi citovaný je článek „*The Effective Use of Benford's Law to Assist in Detecting Fraud in Accounting Data*“. Práce shrnuje dosavadní výsledky výzkumu zejména M. Nigriniho a podává srozumitelný návod na aplikaci Benfordova zákona ve forenzním auditu. Závěry jsou v duchu předchozích zjištění aplikace Benfordova zákona je užitečný nástroj při odhalování podvodů, ale pouze jako iniciační test. Při jeho používání si musí být auditor vědom omezené vypovídací schopnosti.

Benfordův zákon může být použit při odhalování následujících manipulací s daty:

- Zaokrouhlování ekonomických výsledků managementu, například zakrouhlení zisku ze 789 000 na 800 000.
- Zaokrouhlování net income a EPS (earnings per share) nahoru.
- Zaokrouhlování ztráty dolů (Nigrini, 1997).
- Duplicitu u finančních částek, např. faktury.
- Mazání dat.
- Přepisování hodnot.

Abychom mohli Benfordův zákon použít, tak by data měly splňovat následující podmínky:

- Všechna data v souboru musí být ve stejných jednotkách.
- Nesmí se jednat o data omezená maximální a minimální hodnotou.
- Data nemohou být čísla sloužící k identifikaci a nejsou generována náhodně.
- Data by měla obsahovat spíše malá čísla. (TPA Horwath, p.3,2011).
- Je vhodné mít větší soubory dat.
- Data by neměla být ovlivněna psychologii, např. stanovení ceny končící číslem 99.

Další omezení, které sebou přináší aplikace Benfordova zákona, je typ podvodu, který nám může pomoci tato procedura indikovat. Velice zjednodušeně Benfordův zákon nám pomůže zjistit, zda bylo do celkového souboru dat přidáno pozorování nebo naopak bylo vymazáno. Pokud proběhne transakce, která nebyla zaznamenána, např. úplatek, krádež aktiva nebo duplicitní transakce, jako je například stejné číslo faktury, nemůžeme zde Benfordův test aplikovat. Benfordův test nám také nepomůže odhalit fiktivní zaměstnance nebo stejná čísla bankovních účtů (Durtschi, Hillison, Pacini, p.8, 2004).

2. Praktická aplikace

V této části budeme aplikovat Benfordův test prvního čísla, který bývá označován jako test s nejvyšší vypovídací schopností pro identifikaci manipulace s daty, test druhého čísla, který slouží k detekci zaokrouhlování, a test prvních dvou čísel, který slouží k detekci duplicit, na data publikovaná Českým statistickým úřadem o zahraničním obchodě v rozmezí let 1996 až 2012. A to konkrétně na data o obchodní bilanci, která znázorňuje, zda stát více dováží nebo vyváží. Obchodní bilance bývá často zmiňována médiem jako jeden z ukazatelů výkonnosti ekonomiky. Data o obchodní bilanci byly vybrány z důvodů jejich pravidelného měsíčního zveřejňování. Tvoří tedy delší časovou řadu, tudíž lépe vyhovují podmínkám aplikace Benfordova testu, než například data o vývoji HDP, která bývají zveřejňována pouze čtvrtletně. Obchodní bilance je tvořena rozdílem dovozu a vývozu. Ze základní teorie Benfordova zákona je zřejmé, že první číslice rozdílů dvou souborů čísel, jejichž první číslice konvergují k Benfordovu rozdělení, k tomuto rozdělení konvergují také. Pokud tedy čísla o exportu a importu samostatně konvergují k Benfordově rozdělení, budou k Benfordově rozdělení konvergovat i data o obchodní bilanci. Z tohoto důvodu můžeme testovat pouze data o ob-

chodní bilanci a na základě výsledků těchto testů vyvodit závěry pro export a import.

Metodika pro sběr dat ČSÚ je následující:

Vývoz:

Vývoz vyjadřuje hodnotu zboží odeslaného do zahraničí, které přestoupilo státní hranici za účelem jeho trvalého nebo dočasného ponechání v zahraničí. Celkový vývoz se tak skládá z odeslání do států EU a vývozu do zemí mimo EU.

Dovoz:

Dovoz vyjadřuje hodnotu zboží přijatého ze zahraničí, které přestoupilo státní hranici za účelem jeho trvalého nebo dočasného ponechání v tuzemsku. Celkový dovoz se tak skládá z přijetí ze států EU a dovozu ze zemí mimo EU.

ČSÚ zveřejňuje data po jednotlivých měsících, tudíž vzorek testovaných dat bude obsahovat jednotlivě 204 položek.

Pro testování souladu dat s Benfordovým rozdělením použijeme Mean Absolute Deviation a Z test.

Mean Absolute Deviation vypočítáme podle následujícího vzorce:

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^k |AP - EP|}{K}, \quad (4)$$

kde:

AP proporce výskytu jednotlivých čísel v empirickém rozdělení,
EP proporce výskytu jednotlivých čísel v Benfordově rozdělení,
K počet číslic.

Kritické hodnoty Mean Absolute Deviation, které jsou uváděny v empirických pracích Nigriniho jsou následující:

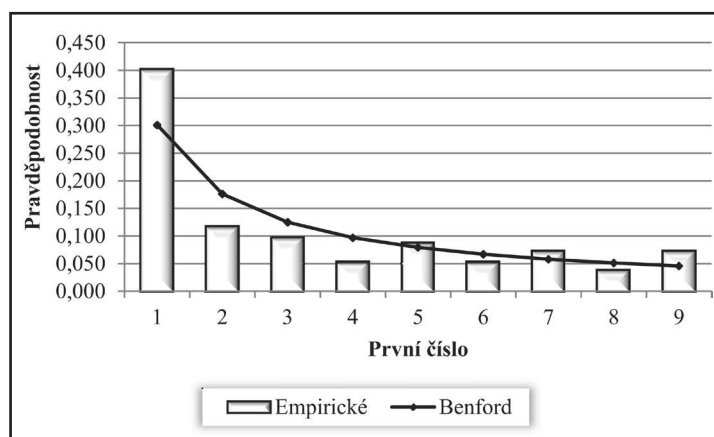
- 0,000–0,006 – blízká konformita,
- 0,006–0,012 – akceptovatelná konformita,
- 0,012–0,015 – nižší konformita,
- 0,015 a více – nekonformita (Nigrini, 2011).

Výhodou využití MAD oproti testům dobré shody je skutečnost, že se vyhneme zkreslení výsledků testů v důsledku nízkého počtu záznamů (Nigrini, 2011). Hodnoty MAD bývají pozitivně korelované s výsledky testů dobré shody.

Tab.1 Výsledky pro první číslo.

Číslo	Počet	Empirické	Benford	Difference	AbsDiff	Z-stat
1	82	0,402	0,301	0,101	0,101	3,066
2	24	0,118	0,176	-0,058	0,058	2,100
3	20	0,098	0,125	-0,027	0,027	1,056
4	11	0,054	0,097	-0,043	0,043	1,957
5	18	0,088	0,079	0,009	0,009	0,349
6	11	0,054	0,067	-0,013	0,013	0,604
7	15	0,074	0,058	0,016	0,016	0,800
8	8	0,039	0,051	-0,012	0,012	0,615
9	15	0,074	0,046	0,028	0,028	1,731

Zdroj: autor.

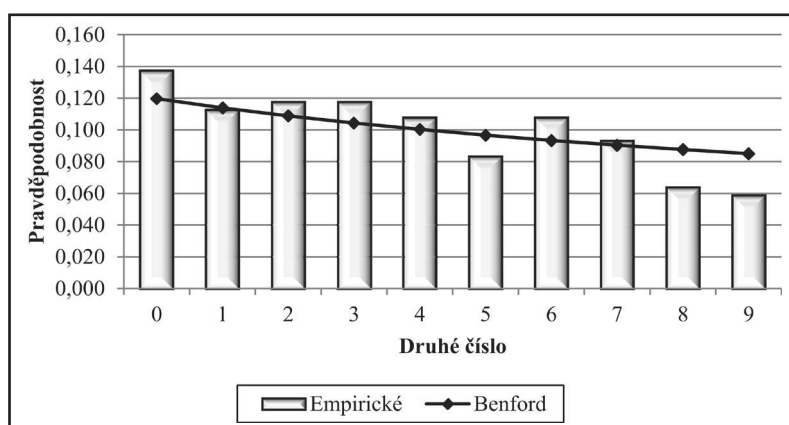


Obr. 1 Benfordovo vs empirické rozdělení pro první číslo. Zdroj: autor.

Tab. 2 Výsledky pro druhé číslo.

Číslo	Počet	Empirické	Benford	Difference	AbsDiff	Z-stat
0	28	0,137	0,120	0,018	0,018	0,666
1	23	0,113	0,114	-0,001	0,001	0,051
2	24	0,118	0,109	0,009	0,009	0,292
3	24	0,118	0,104	0,013	0,013	0,508
4	22	0,108	0,100	0,008	0,008	0,242
5	17	0,083	0,097	-0,013	0,013	0,527
6	22	0,108	0,093	0,014	0,014	0,590
7	19	0,093	0,090	0,003	0,003	0,017
8	13	0,064	0,088	-0,024	0,024	1,081
9	12	0,059	0,085	-0,026	0,026	1,215

Zdroj: autor.



Obr. 2 Benfordovo vs empirické rozdělení: druhé číslo. Zdroj: autor.

Jako pomocné kritérium použijeme výsledky Z testů, nedostatkem tohoto testu je riziko ovlivnění výsledku testu v důsledku malé velikosti testovaného vzorku dat. Z statistika – ukazuje statistickou významnost diferencí mezi dvěma proporcemi dat, v našem případě mezi empirickým výskytem četností jednotlivých číslic a teoretickým výskytem Benfordova rozdělení. Hodnota Z testu nad 1,96 je signifikantní na hladině významnosti 0,05 a nad 2,57 je signifikantní na hladině významnosti.

$$Z = \frac{\left(I \left(p_0 - p_e I - \frac{1}{2n} \right) \right)}{s_1}, \quad (5)$$

kde:

- p_0 je pozorovaná proporce výskytu jednotlivých čísel v souboru,
 p_e je očekávaná proporce výskytu jednotlivých čísel podle Benfordova rozdělení,
 s_1 je směrodatná odchylka určitého čísla,
 n je počet pozorování.

2.1 Test prvního čísla obchodní bilance

Na hladině významnosti 0,05 testujeme následující hypotézu: H_0 = výskyt všech jednotlivých čísel na prvním místě konverguje k Benfordově rozdělení

H_1 = výskyt všech jednotlivých čísel na prvním místě nekonverguje k Benfordově rozdělení

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^9 AbsDiff}{9} = 0,0341. \quad (6)$$

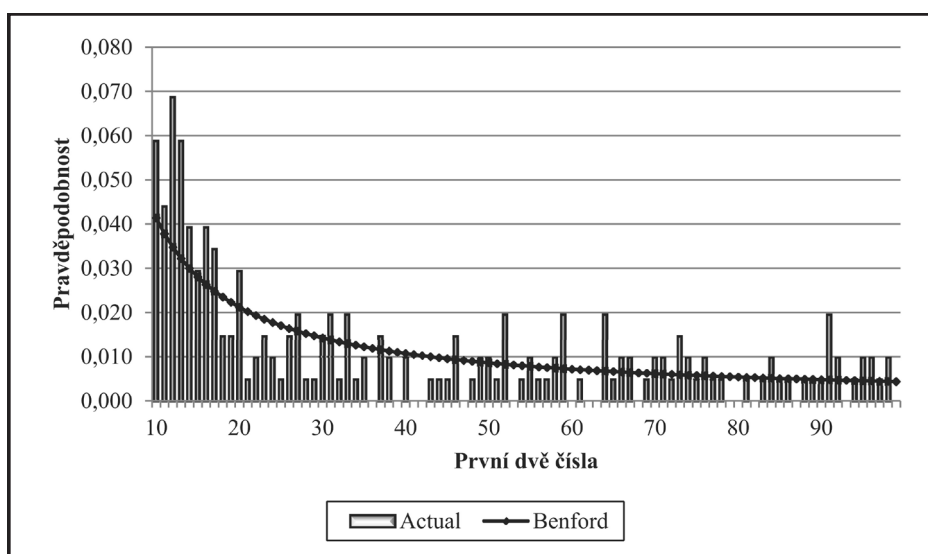
Na základě hodnot MAD a Z testu na zvolené hladině významnosti zamítáme hypotézu H_0 .

2.2 Test druhého čísla obchodní bilance

Na hladině významnosti 0,05 testujeme následující hypotézu:

- H_0 = výskyt všech jednotlivých čísel na druhém místě konverguje k Benfordově rozdělení.
- H_1 = výskyt všech jednotlivých čísel na druhém místě nekonverguje k Benfordově rozdělení.

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^9 AbsDiff}{9} = 0,0129. \quad (7)$$



Obr. 3 Benfordovo vs empirické: první dvě čísla. Zdroj: autor.

Hodnoty MAD značí akceptovatelnou konformitu, taktéž Z test nevykázal pro jednotlivá čísla vyšší hodnoty než 1,96 nezamítáme tedy hypotézu H_0 .

2.3 Test prvních dvou čísel obchodní bilance

Na hladině významnosti 0,05 testujeme následující hypotézu:

- H_0 = výskyt čísel na prvním a druhém místě konverguje k Benfordově rozdělení.
- H_1 = výskyt čísel na prvním a druhém místě nekonverguje k Benfordově rozdělení.

Výsledná tabulka s hodnotami Z testu obsahuje 100 řádků, proto ji autor neuvádí v tomto textu. Hodnota MAD byla 0,00592. Žádná hodnota Z statistiky nepřekročila kritickou hodnotu, tudíž nezamítáme hypotézu H_0 .

3. Diskuze

Výsledky testů vykázaly značnou nekonzistenci, zatímco u testu prvního čísla obchodní bilance, jsme zjistily že hodnoty testů vykazují odlišnost od Benfordova rozdělení, testy druhého a prvních dvou čísel naopak ukázaly konvergenci k Benfordovu rozdělení.

Výsledky u prvního čísla nemusí nutně vést k podezření na manipulaci s daty. Při interpretaci českých výsledků, se autor přiklání k tezím, které byly publikovány v následujících článcích “*On the Application of Benford's Law to International Macroeconomic Statistics*” (Nye, Moul, 2007) a “*Benford's*

Law and Macroeconomics Data Quality” (Gonzales – Garcia, Pastor, 2010). Odchylnost dat od Benfordova rozdělení není tedy způsobena možnou manipulací s daty, ale především strukturálními změnami v ekonomice v období 1996–2012.

Pokud porovnáme výsledky této studie se závěry článku “*Fact and Fiction in EU Governmental Economics Data*” zejména s obsaženým hodnocením kvality českých makroekonomických dat, docházíme k odlišným závěrům. Hlavní příčiny těchto odlišností jsou rozsah testovaných dat a použitá testová statistika. Ve zmiňované studii se autoři zaměřili na větší počet kategorií nejen na zahraniční obchod a jako výsledná hodnota za jednotlivé země byl udáván průměr výsledků testu chi-kvadrát. Další příčinou odlišných výsledků jsou vlastnosti použitého testového kritéria. Test zvolený autory výše zmíněné studie není vhodný pro malé vzorky dat (bližší viz. Nigrini, 2011). Problém s velmi malým rozsahem testovaných dat se týkal i studií (Nye, Moul, 2007) a (Gonzales – Garcia, Pastor, 2010). Velikost testovaného vzorku dosahovala řádu několika set záznamů, empirické poznatky z účetní aplikace však hovoří o optimální velikosti zkoumaného souboru dat min. 1000 záznamů (Nigrini, 2011).

Závěr

Na základě rešerše literatury a vlastních poznatků z praktické aplikace můžeme konstatovat, že využitelnost Benfordova testu při kontrole kvality

makroekonomických dat je velmi omezená. Tento test může sloužit pouze jako doplňkový test k dalším metodám zkoumání kvality makroekonomických dat. Hlavními limitujícími faktory pro tento test jsou dostupnost a rozsah běžně publikovaných dat, riziko

ovlivnění výsledků nevhodně zvolenou statistikou, makroekonomickými transformacemi dat a strukturálními posuny v ekonomice. Rozhodujícím nástrojem pro kontrolu kvality makroekonomických dat tak zůstává audit přímo na místě.

Literatura

- Barrow, D. J. (2011). *Benford's very strange law*. [Lecture on Gresham College], [online][cit.2013-06-22] Dostupné z: <http://www.youtube.com/watch?v=4iz4EHriYz0&feature=related>.
- Berhger, A., Hill, P. T. (2011). A Basic Theory of Benford's Law. *Probability Surveys*, 8, 126 s., [online][cit.2013-06-22] Dostupné z: <http://www.ijournals.org/ps/include/getdoc.php?id=696&article>.
- Carslaw, C. A. P. (1988). Anomalies in Income Numbers: Evidence of Goal Oriented Behaviour. *Accounting Review*, 63, s. 321–327.
- Decker, J., Myagkov, M., Ordeshook, C. P. (2011). The irrelevance of Benford's law for detecting fraud in election. *Capotech/ MIT Voting Technology Project Working Paper*, 24 s., [online] [cit.2013-06-22] Dostupné z: http://www.vote.caltech.edu/drupal/files/rpeavt_paper/benford_pdf_4b97cc5b5b.pdf.
- Durtschi, C., Hillison, W., Pacini, C. (2004). The effective use of benford's law to assist in detecting fraud in accounting data. *Journal of Forensic accounting*, 5, s. 17–34.
- Gonzales, J., Pastor, G. (2009). Benford's Law and Macroeconomic Data Quality. *International Monetary Fund, Working Paper 9/10*, 20 s., [online][cit.2013-06-22] Dostupné z: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1356437.
- Hill, T. P. (1998), The First Digit Phenomenon. *American Scientist*, 86, s. 358–363.
- Hill, T. P. (1995a). A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law. *Statistical Science*, 10(4), s. 354–363.
- Hill, T. P. (1995b), Base-Invariance Implies Benford's Law. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(3), s. 887–895.
- Nigrini, M. (2011). *Forensic Analytics: Methods and Techniques for Forensic Accounting Investigation*. John Wiley&Sons Inc, 481 s.
- Nigrini, M., Mittermaier, L. (1997). The Use of Benford's Law as an Aid in Analytical Procedures. *Auditing: A Journal of Practice and Theory*, 16, s. 52–67.
- Nye, J., Moul, C. (2007). The Political Economy of Numbers: On the Application of Benford's Law to International Macroeconomic Statistics. *B.E. Journal of Macroeconomics*, 7(1), s. 1–14.
- Rauch, B., Göttische, M., Brähler, G., Engel, S. (2011). Fact and Fiction in EU Governmental Economics Data. *German Economics Revue*, 12(3), s. 243–255.
- Tpa Horwath. (2011). *Nové způsoby odhalování manipulace s účetními daty*. 8 s., [online][cit.2013-06-22] Dostupné z: http://www.tpa-howath.cz/upload/files/PDF/Manipulace_s_ucetnimi_daty_JSK_10_08.pdf.
- Watrin, CH. (2008). Benford's Law: An Instrument for Selectin Tax Audit Targets? *Review of Managerial Science*, 2(3), s. 219–237.

Doručeno redakci: 18. 6. 2013

Recenzováno: 17. 2. 2014

Schváleno k publikování: 30. 5. 2014

Ing. Michal Plaček, Msc.

Soukromá vysoká škola ekonomická Znojmo
Katedra financí a účetnictví
Loucká 21, 669 02 Znojmo
Česká republika
tel.: 739 208 133
e-mail: Placek@svse.cz